TEMA 3: REPRESENTACIÓN DE FOURIER

Análisis de Fourier: señales periódicas discretas y su representación mediante series de Fourier (DTFS); señales periódicas continuas y su representación mediante series de Fourier (FS); señales aperiódicas discretas y su representación mediante transformada de Fourier (DTFT); señales aperiódicas continuas y su representación mediante transformada de Fourier (FT); propiedades de la representación de Fourier; transformada de Fourier de señales periódicas.

FUNCIONES BASE DE SISTEMAS LTI

Tema 2: las funciones base eran impulsos desplazados

Si representamos la señal de entrada como combinación lineal de impulsos desplazados y escalados, la respuesta del sistema LTI es una combinación lineal de las respuestas al impulso desplazadas y escaladas.

- Sistemas Discretos:

$$x[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

- Sistemas Continuos:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Tema 3: las funciones base son exponenciales complejas

- Caso general: $\phi(t) = e^{st},\ s = \sigma + j\omega;\qquad \phi[n] = z^n,\ z = re^{j\Omega}$

  $\phi(t),\ \phi[n]$ son funciones propias (autofunciones) de los sistemas LTI:

  – Si $x(t) = e^{st}$, entonces:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s)$$

$H(s)$: valor propio (autovalor) asociado a la exponencial compleja e^{st}

– Si $x[n] = z^n$, entonces:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = z^n H(z)$$

$H(z)$: valor propio (autovalor) asociado a la exponencial compleja z^n

- **Fourier:** $\phi(t) = e^{j\omega t}$; $\phi[n] = e^{j\Omega \mathrm{n}}$

$\phi(t)$, $\phi[n]$, funciones propias (autofunciones) de los sistemas LTI.

– Si $x(t) = e^{j\omega t}$, entonces:

$$y(t) = h(t) * x(t) = e^{j\omega t} H(j\omega) = x(t) H(j\omega)$$

$H(j\omega)$: valor propio (autovalor), en general complejo, asociado a la exponencial compleja $e^{j\omega t}$.

Si la entrada a un sistema LTI continuo es una exponencial compleja, la salida será la misma exponencial compleja multiplicada por la respuesta en frecuencia del sistema $H(j\omega)$.

– Si $x[n] = e^{j\Omega n}$, entonces:

$$y[n] = h[n] * x[n] = e^{j\Omega n} H\left(e^{j\Omega}\right) = x[n] H\left(e^{j\Omega}\right)$$

$H\left(e^{j\Omega}\right)$: valor propio (autovalor), en general complejo, asociado a la exponencial compleja $e^{j\Omega n}$.

Si la entrada a un sistema discreto LTI es una exponencial compleja, la salida será la misma exponencial compleja multiplicada por la respuesta en frecuencia del sistema $H\left(e^{j\Omega}\right)$.

Ortogonalidad de las exponenciales complejas

- Dos secuencias discretas $\phi_k[n]$ y $\phi_m[n]$ periódicas de periodo N son ortogonales si su producto interno es nulo:

$$\langle \phi_k[n], \phi_m[n] \rangle = \sum_{n=\langle N \rangle} \phi_k[n] \text{ y } \phi_m^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \begin{cases} N, k = m \\ 0, \ \ k \neq m \end{cases}$$

- Dos señales continuas $\phi_k(t)$ y $\phi_m(t)$ periódicas de periodo T son ortogonales si su producto interno es nulo:

$$\langle \phi_k(t), \ \phi_m(t) \rangle = \int_{\langle T \rangle} \phi_m \phi_m^*(t) = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} T, k = m \\ 0, \ \ k \neq m \end{cases}$$

REPRESENTACIÓN DE FOURIER

TIEMPO	Periódica	No Periódica
Continua	Series de Fourier (FS)	Transformada de Fourier FT
Discreta	Series de Fourier en tiempo discreto DTFS	Transformada de Fourier en tiempo discreto DTFT

SERIES DE FOURIER DE SEÑALES DISCRETAS EN EL TIEMPO (DTFS)

$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$ (Ecuación de síntesis)

$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ (Ecuación de análisis)

$$x[n] \ y \ X[k] \ tienen \ periodo \ N; \ \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

SERIES DE FOURIER DE SEÑALES CONTINUAS EN EL TIEMPO (FS)

$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t}$ (Ecuación de síntesis)

$X[k] = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ (Ecuación de análisis)

$$x(t)\ tiene\ periodo\ T;\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- ### Convergencia de las Series de Fourier (FS):

Señales periódicas que tienen energía finita en un periodo pueden representarse mediante series de Fourier:

$$\int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Si se cumple esta condición, está garantizado que los coeficientes de la series de Fourier son finitos: $X[K] < \infty$.

Además, el error en la aproximación por la serie truncada de Fourier tiende a cero a medida que se toman más coeficientes, es decir, el error cometido tiene energía nula:

$$\int_{\langle T \rangle} |error(t)|^2 dt = 0; \quad MSE = 0$$

Esto no significa que $x(t) = \hat{x}(t)\ \forall t$, sino que no hay energía en su diferencia.

La igualdad estricta, es decir, la convergencia punto a punto excepto en valores aislados de t para los cuales $x(t)$ es discontinua puede asegurarse si se cumplen las condiciones de Dirichlet:

1. $x(t)$ es absolutamente integrable en un periodo

$$\int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$$

2. El número de máximos y mínimos de la señal en un periodo es finito.
3. El número de discontinuidades de la señal en un periodo es finito.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES DISCRETAS EN EL TIEMPO (DTFT)

$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$ (Ecuación de síntesis)

$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ (Ecuación de análisis)

$$X(e^{j\Omega})\ tienen\ periodo\ 2\pi$$

- Convergencia de la Transformada de Fourier (DTFT):

Las ecuaciones de análisis y síntesis son válidas para señales absolutamente sumables:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Si no se cumple esta condición, pero tiene energía finita:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Entonces, la suma de la ecuación de análisis converge en el sentido de energía nula en el error cuadrático medio, aunque no converge punto a punto.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES CONTINUAS EN EL TIEMPO (FT)

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ (Ecuación de síntesis)

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ (Ecuación de análisis)

Para cada frecuencia ω, la FT de una señal continua y aperiódica, $X(j\omega)$, representa el contenido espectral de la señal $x(t)$ correspondiente a esa frecuencia. La señal $x(t)$ puede escribirse como superposición de armónicos a frecuencias señal ω, cuyas amplitudes vienen dadas por $X(j\omega)$.

- Convergencia de la Transformada de Fourier (FT):

Si la señal $x(t)$ tiene energía finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

La transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}\big(X(j\omega)\big) \longrightarrow x(t)$. Esto no significa convergencia punto a punto ($x(t) = \hat{x}(t)\ \forall t$) pero si que hay energía nula en el error de la aproximación

La convergencia punto a punto excepto en valores aislados de t para los cuales $x(t)$ es discontinua puede asegurarse si se cumplen las condiciones de Dirichlet:

1. $x(t)$ es absolutamente integrable en un periodo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. El número de máximos y mínimos de la señal en un periodo es finito.
3. El número de discontinuidades de la señal en un periodo es finito.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS

La transformada de Fourier se ha definido para señales aperiódicas, señales de energía. Podemos generalizarlas a señales de potencia incluyendo $\delta[n]\ o\ \delta(t)$ en la transformada. Así:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} X\big(e^{j\Omega}\big) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\omega - k\omega_0)$$

La transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de deltas cuya frecuencia angular es múltiplo de la frecuencia fundamental de $x(t)$ y cuyos pesos son los coeficientes del desarrollo de la serie de Fourier multiplicados por 2π.

PROPIEDADES DE LA REPRESENTACIÓN DE FOURIER

Las propiedades fundamentales de la representación de Fourier para las señales analizadas anteriormente están reflejadas en la tabla proporcionada en clase y que también tenéis en la página de la asignatura.